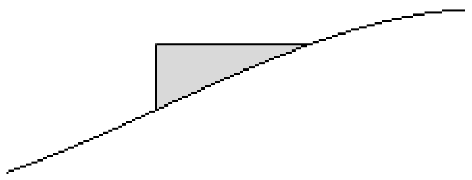
Wahlteil 2016 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$ beschreibt modellhaft für $-1 \leq x \leq 5$ das Profil eines Geländequerschnitts.
Die positive x-Achse weist nach Osten, $f(x)$ gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an (1 Längeneinheit entspricht 100 m).

Wahlteil 2016 – Analysis A 1

b) Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt. Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.



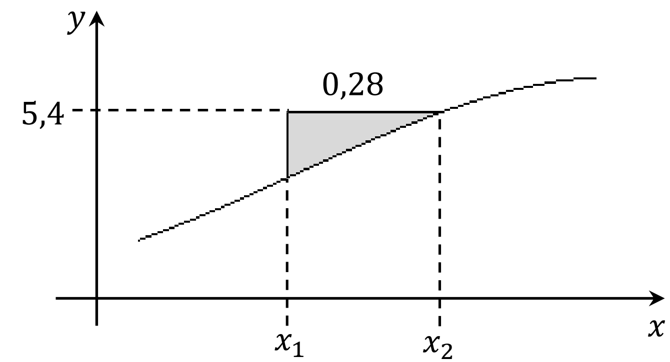
Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130 m² ist.

(3 VP)

Wahlteil 2016 – Analysis A 1

Lösung b)

Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils



Den oberen Rand der Wand stellen wir als Gerade mit der Gleichung $g(x) = 5{,}4$ dar, da laut Aufgabe dieser Rand in einer Höhe von 540 m liegt. (Beachte: 1 LE entspricht 100 m).

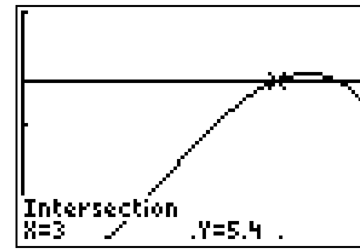
Der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils ist dann gegeben durch:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Begrenzungen x_1 und x_2 herauszufinden. Den Rest erledigen wir mit dem GTR.

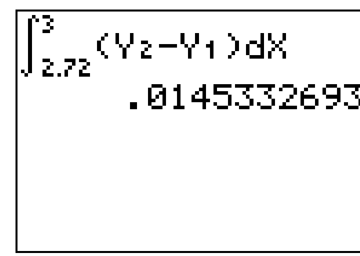
Wahlteil 2016 – Analysis A 1

Schritt 1: Bestimmung von x_2 und x_1:



Geben Sie im GTR bei Y_2 den Wert $5{,}4$ ein, lassen Sie sich die beiden Graphen von Y_1 und Y_2 zeichnen und bestimmen Sie mit 2ND CALC intersect den Schnittpunkt der beiden Graphen. Sie erhalten $x_2 = 3$ und daraus $x_1 = x_2 - 0{,}28 = 2{,}72$.

Schritt 2: Bestimmung des Flächeninhalts mit dem GTR



Wir haben nun $A = \int_{2,72}^{3} \big(g(x) - f(x)\big)dx$ und geben dies wie nebenstehend gezeigt im GTR ein.
Dies liefert $A \approx 0{,}0145$. 1 LE² entspricht 10.000 m².
Folglich ist $A = 145$ m².

Ergebnis: Der sichtbare Wandteil hat eine Fläche von etwa 145 m² und ist damit größer als 130 m².

Wahlteil 2013 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8; \quad -4 \leq x \leq 4 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) …
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen $1{,}7$ m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich im Stollen?

(6 VP)

Wahlteil 2013 – Analysis A 1

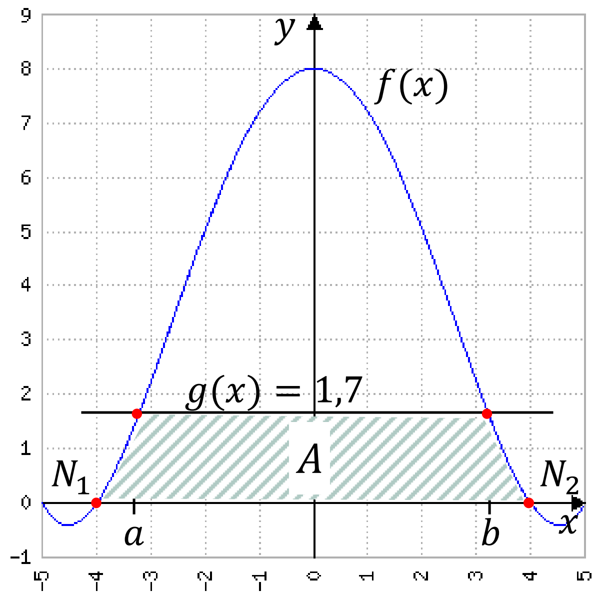
Wassermenge im Stollen

Die Wasserstandslinie ist gegeben durch die Gerade $g(x) = 1{,}7$. Mit dem GTR bestimmt man die Schnittpunkte a und b mit $f(x)$ über 2ND CALC INTERSECT und erhält $a = -3{,}2$ und $b = 3{,}2$.

Die Nullstellen von $f(x)$ erhält man über 2ND CALC ZERO bei $N_1 = -4$ und $N_2 = 4$.

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse ist gegeben durch $A_1 = \int_{-4}^{4} f(x)dx$. Mit dem GTR erhält man $A_1 \approx 37{,}205$.

Skizze des Graphen von $f(x)$



Die Fläche zwischen den beiden Kurven ist gegeben durch $A_2 = \int_{-3,2}^{3,2}\big(f(x) - g(x)\big)dx$.

Wahlteil 2013 – Analysis A 1

Wenn Sie $f(x)$ bei Y_1 und $g(x)$ bei Y_2 im Y-Editor eingegeben haben, so können Sie den Ausdruck $\int_{-3,2}^{3,2}\big(f(x) - g(x)\big)dx$ durch Eingabe von fnInt(Y_1-Y_2,X,-3.2,3.2) bestimmen. Hier liefert der GTR den Wert $A_2 \approx 25{,}091$.

Die Querschnittsfläche, die wir für die Berechnung der Wassermenge brauchen ist dann $A = A_1 - A_2 = 12{,}114$.

Das Wasservolumen ergibt sich durch

$V = A \cdot \text{Stollenlänge} \; = \; 12{,}114m^2 \cdot 50m = 605{,}7m^3.$

$1m^3$ entspricht 1.000 Liter.

Ergebnis: Die Wassermenge im Stollen beträgt $\underline{605.700 \text{ Liter}}$.

Wahlteil 2013 – Analysis A 2

Aufgabe A 2.2

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$.

Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.

Berechnen Sie A exakt.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g.

(4 VP)

Wahlteil 2013 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.2

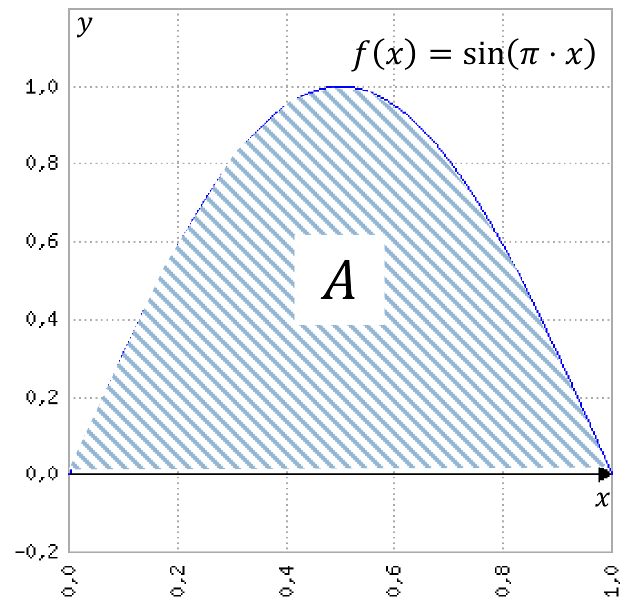
Flächeninhalt

Es gilt:

$$A = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi)\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$



Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt exakt $\underline{\frac{2}{\pi}\text{ FE}}$.

$f(x) = \sin(\pi \cdot x)$
$0 \leq x \leq 1$

Wahlteil 2013 – Analysis A 2

Funktionsgleichung für g

Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades hat die allgemeine Form $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Die x-Achse wird bei $x = 0$ und $x = 1$ geschnitten, d.h. es gilt $g(0) = 0$ und $g(1) = 0$. Aus $g(0) = 0$ erhält man $c = 0$.

Aus $g(1) = 0$ erhält man $\underline{I.\, a + b = 0}$.

Die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ist gegeben durch

$$A_2 = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)$$

Laut Aufgabenstellung soll A_2 halb so groß sein, wie die Fläche A aus dem vorangehenden Aufgabenteil. Somit gilt $\underline{II.\, \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{\pi}}$.

Wahlteil 2013 – Analysis A 2

Aus I. $a + b = 0$ folgt $b = -a$.

Eingesetzt in II. folgt $\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{6}a = \frac{1}{\pi}$

und damit $a = -\frac{6}{\pi}$ sowie $b = \frac{6}{\pi}$.

Ergebnis: Der Funktionsterm von g lautet $\underline{g(x) = -\frac{6}{\pi}x^2 + \frac{6}{\pi}x.}$